20. Let a function f be analytic inside and on a simple closed contour C except for atmost a finite number of poles interior to C. Also let f have no zeros on C and atmost a finite number of zeros interior to C. If C is described in the positive sense, prove that $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$.

f என்பது சாதாரண மூடிய வளைகோடு மற்றும் C-ன் உள்ளே உள்ள முடியுறு எண்ணிக்கையிலான துருவப்புள்ளிகளைத் தவிர C-ன் வளைவிலும் உட்புறத்திலும் பகுமுறை சார்பு எனில் மேலும் f க்கு C இல் பூஜ்ஜியங்கள் இல்லை என்றும், C க்குள் அதிகபட்சமாக வரையறுக்கப்பட்ட எண்ணிக்கையிலான பூஜ்ஜியங்கள் இருக்க வேண்டும். C நேர்மறை அர்த்தத்தில் விவரிக்கப்பட்டால்

$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.



NOVEMBER/DECEMBER 2025

CMA63 — COMPLEX ANALYSIS — II

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL the questions.

1. Show that if $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n = S$ then $\sum_{n=1}^{\infty} C Z_n = CS$ (where C be any complex number).

   $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n = S$ எனில் $\sum_{n=1}^{\infty} C Z_n = CS$, (C என்பது மெய்ப்புள்ளி எண்) எனக் காட்டுக.

2. State maximum modulus theorem.

   மீப்பெரு மட்டுத் தேற்றத்தை கூறுக.

3. Find the Laurent's series expansion of $f(z) = z^2 e^{1/z}$ about $z = 0$.

   $z = 0$ -வில் $f(z) = z^2 e^{1/z}$ என்ற சார்புக்கு லாரன்ஸின் விரிவைக் காண்க.

4. Define Maclaurin's series.

மெக்லாரின் தொடரை வரையறு.

5. Find the residue of $f(z)=\tan z$ at $\pi/2$.

$f(z)=\tan z$ எனும் சார்பிற்கு $\pi/2$-ல் எச்சம் காண்க.

6. State Cauchy's residue theorem.

காஷியின் எச்சத் தேற்றத்தைக் கூறுக.

7. State Jordan's inequality.

ஜோர்டானின் சமனிலியை கூறுக.

8. Define cauchy principal value.

காசியின் முதன்மை மதிப்பை வரையறு.

9. Find the zeros of $f(z)=e^z(z-2i)^2(z+3)^3$.

$f(z)=e^z(z-2i)^2(z+3)^3$-ன் பூச்சிய உறுப்புகளைக் காண்க.

10. Define a pole of order m.

m வரிசையுடைய துருவத்தை வரையறு.

(அ) $|z|<1$ (ஆ) $1<|z|<2$

(இ) $|z|>2$

எனும் பகுதிகளில் $\frac{-1}{(z-1)(z-2)}$-ஐ அடுக்குத் தொடராக விரிவாக்கம் செய்க.

18. Evaluate the integral $\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}dz$ where C is the circle $|Z|=2$, described counter clockwise.

C என்பது வட்டம் $|Z|=2$, எதிர் கடிகார திசையில் விவரிக்கப்பட்டுள்ளது எனில் $\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}dz$-யை மதிப்பிடுக.

19. Show that $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1=a\sin\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, $(-1<a<1)$.

$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1=a\sin\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, $(-1<a<1)$ எனக் காண்க.

(b) Determine the number of zeros of the polynomial $2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 9$ inside the circle $|z| = 1$.

வட்டம் $|z| = 1$ க்குள் பல்லுறுப்புக்கோவை $2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 9$ இன் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையை தீர்மானி.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Prove that $z_n = x_n + i\,y_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ and $z = x + i\,y$, then $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ if and only if $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ and $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

$z_n = x_n + i\,y_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ மற்றும் $z = x + i\,y$ எனில் $\lim_{n\to\infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$ மற்றும் $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ என நிரூபி.

17. Expand $\dfrac{-1}{(z-1)(z-2)}$ as a power series in the regions

(a) $|z| < 1$ (b) $1 < |z| < 2$

(c) $|z| > 2$

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL the questions.

11. (a) State and prove the fundamental theorem of algebra.

வகை கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.



Or

(b) Show that if $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n = s$, then $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{Z_n} = \bar{s}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n = s$ எனில் $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{Z_n} = \bar{s}$ எனக் காட்டுக.

12. (a) Expand Ze^{2z} in a Taylor's series about $z = -1$.

Ze^{2z} என்ற சார்பை $z = -1$ யை பற்றி டெய்லர் வரிசையில் விரித்து எழுதுக.

Or

(b) Prove that the power series $s(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ represents a function that is analytic at every point interior to its circle of convergence.

அடுக்குத் தொடர் $s(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ என்பது அதன் குவிப்பு வட்டத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளி உட்புறத்திலும் பகுப்பாய்வு செய்யும் ஒரு செயல்பாட்டைக் குறிக்கிறது என்பதை நிரூபி.

13. (a) Define singular points and explain its different kinds with suitable examples.

சிறப்பு புள்ளிகளை வரையறுத்து அதன் வகைகளை உதாரணத்துடன் விளக்குக.

Or

(b) Show that $\int_C \exp\left(\frac{1}{Z^2}\right) dz=0$ where C is the circle $|z|=2$ described in the positive sense.

C என்பது நேர்மறை போக்கில் வரையறுக்கப்பட்ட வட்டம் $|z|=2$ எனில் $\int_C \exp\left(\frac{1}{Z^2}\right) dz=0$ எனக் காண்பி.

14. (a) Prove that $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ என நிரூபி.

Or

(b) Evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$-யை மதிப்பிடுக.

15. (a) Show that if a function f is bounded and analytic throughout a domain $0<|z-z_0|<\delta$, then either f is analytic at z_0 or else z_0 is a removable singular point of that function.

$0<|z-z_0|<\delta$ ஒரு களம் முழுவதும் f ஒரு சார்பு வரம்புக்குட்பட்டு பகுப்பாய்வு செய்யப்பட்டால், f என்பது z_0 இல் பகுப்பாய்வாக இருக்கும் அல்லது z_0 என்பது அந்தச் செயல்பாட்டின் நீக்கக்கூடிய வழுப்புள்ளியாக இருக்கும் எனக் காட்டுக.

Or